ОБОСНОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ [1]

Д.Н. Тумаков (Казань)

1. Интегральное уравнение задачи дифракции

Пусть однородный в направлении оси y металлический экран в сечении плоскостью $y = \text{const}$ совпадает с осью x всюду, кроме интервала $(0, 1)$, и форму экрана в сечении задает кусочно дифференцирумая функция $z = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ (Рис. 1).

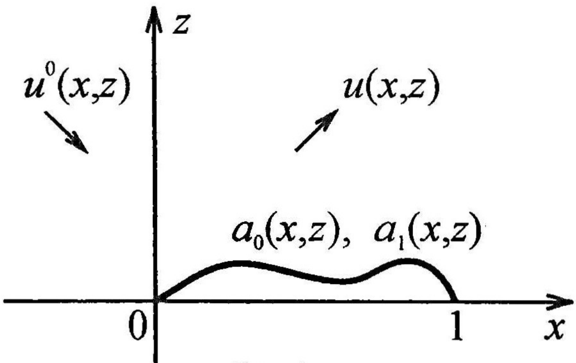

Рис. 1

Будем рассматривать скалярное электромагнитное поле, компоненты которого не зависят от координаты y. Пусть сверху (из области $z > f(x)$) на экран падает плоская TE–волна с потенциальной функцией $u^0(x, z) = \exp(-ik_X x + ik_Z z)$. Нужно найти рассеянное поле.

Как показано в [1], задача дифракции электромагнитной волны на криволинейном экране сводится к интегральному уравнению

$$\int_0^1 a_1(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\exp\left(i\gamma^0(\xi)f(x) + i\xi x\right) dx = \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при поддержке фонда НИОКР РТ (грант 05-5.1-16.2002 (Ф))

$$= i \int\limits_0^1 \left(\gamma^0(\xi) - \xi f'(x)\right) \exp(-ik_X x + ik_Z f(x) + i\gamma^0(\xi) f(x) + i\xi x)\, dx,$$

$$-\infty < \xi < +\infty,$$

где

$$\gamma^0(\xi) = \{|\xi| \geq k : i\sqrt{\xi^2 - k^2}; \quad |\xi| \leq k : -\sqrt{k^2 - \xi^2}\}.$$

2. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений

Уравнение (1) преобразуем, умножив обе его части на $\exp(i\gamma^0(\xi)f(t) + i\xi t)$ и проинтегрировав по t. Будем искать решение уравнения в виде полиномиального ряда

$$a_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ , \tag{2}$$

это равенство понимается в обобщенном смысле.

Проектируя уравнение на систему функций $\{x^m\}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) вида

$$Ac = y \ , \tag{3}$$

где элементы матрицы A и векторов c и y

$$a_{mn} = \int\limits_0^1 t^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^1 x^n \sqrt{1 + (f'(x))^2} \times$$

$$\times \exp(i\gamma(\xi)[f(x) + f(t)] + i\xi(x + t))\, dx\, d\xi\, dt, \tag{4}$$

$$y_m = i \int\limits_0^1 t^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^1 [\gamma(\xi) - \xi f'(x)] \sqrt{1 + (f'(x))^2} \times$$

$$\times \exp(-ik_X x + ik_Z f(x) + i\gamma(\xi)[f(x) + f(t)] + i\xi(x + t))\, dx\, d\xi\, dt. \tag{5}$$

Приближенное решение БСЛАУ (3) может быть найдено методом редукции (усечения).

3. Обоснование метода редукции

Обоснование метода редукции системы (3) проведем на основе абстрактной приближенной схемы [3]. Пусть точный оператор A соответствует умножению на бесконечную матрицу A в пространстве последовательностей $X = Y = l_2$. Пусть N – параметр усечения, $\overline{X} = \overline{Y} = R^{N+1}$ – пространство конечномерных векторов со сферической нормой и $\overline{A}$ – аппроксимирующий оператор. Оператор аппроксимации T усекает бесконечномерный вектор x до конечномерного $\overline{x}$, а оператор интерполяции S дополняет $\overline{x}$ нулевыми компонентами до бесконечномерного вектора.

Если искомое поле удовлетворяет условиям излучения, то уравнение (1) и, следовательно, система (3), могут иметь только одно решение (теорема единственности доказывается методом, изложенным в [2, §2]). Дальнейшие рассуждения связаны с исследованием коэффициентов m_1 и m_2 в неравенствах вида

$$\|(\overline{A} - T_Y A S_X)\overline{x}\|_{\overline{Y}} \leq m_1\|\overline{x}\| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}), \tag{6}$$

$$\|(S_Y T_Y - I) A S_X \overline{x}\|_Y \leq m_2\|\overline{x}\| \quad \forall \overline{x} \in D(\overline{A}). \tag{7}$$

Достаточно показать, что $m_1 = m_1(N)$ и $m_2 = m_2(N)$ стремятся к нулю с ростом параметра усечения N.

Пусть M – число узлов квадратурной формулы для приближенного вычисления интегралов по отрезку $[0,1]$ в (4), (5) и R_M – ее погрешность.

Лемма 1 . *Если*

$$M \geq N^{3/2}, \quad R_\infty \leq O(N^{-5/2}), \tag{8}$$

то

$$m_1^2 \leq O\left(\frac{1}{N}\right), \quad m_2^2 \leq O\left(\frac{1}{N}\right). \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим левую часть неравенства (6)

$$\left\|\left(\overline{A} - T_Y A S_X\right)\overline{x}\right\|_{\overline{Y}}^2 = \sum_{m=0}^{N}\left|\sum_{n=0}^{N}\overline{x}_n R_{mn}\right|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{N}\left(\sum_{n=0}^{N}|\overline{x}_n|^2 \times \sum_{n=0}^{N}|R_{mn}|^2\right),$$

здесь R_{mn} – погрешность аппроксимации a_{mn} выражением вида

$$\overline{a}_{mn} = \sum_{[0,1]} \sum_{(-\infty,+\infty)} \sum_{[0,1]}$$

при численном интегрировании. Тогда

$$m_1^2(N) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} |R_{mn}|^2 .$$

Рассмотрим левую часть неравенства (7)

$$\|(S_Y T_Y - I)\, A S_X \overline{x}\|_{\overline{Y}}^2 = \sum_{m=N+1}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^{N} \overline{x}_n a_{mn} \right|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{m=N+1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} |\overline{x}_n|^2 \times \sum_{n=0}^{N} |a_{mn}|^2 \right) .$$

Отсюда следует, что

$$m_2^2(N) = \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} |a_{mn}|^2 .$$

Представим a_{mn} в виде

$$a_{mn} = \int_0^1 t^m \int_0^1 x^n \sqrt{1 + (f'(x))^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia\gamma(\xi)+ib\xi} d\xi dx dt,$$

где

$$a = f(x) + f(t), \quad b = x + t,$$

и вычислим внутренний интеграл

$$I(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia\gamma(\xi)+ib\xi} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia\gamma(\xi)} d\frac{e^{ib\xi}}{ib} =$$

$$= \frac{1}{ib} \left[\int_{-\infty}^{-k} + \int_{k}^{+\infty} \right] e^{ib\xi} d\left(e^{-a\sqrt{\xi^2-k^2}}\right) -$$

$$-\frac{1}{b}\int\limits_{-k}^{k} a\frac{\xi}{\sqrt{k^2-\xi^2}}e^{-ia\sqrt{k^2-\xi^2}+ib\xi}d\xi.$$

$$|I(x,t)| \le \frac{2}{b}\int\limits_{k}^{+\infty} d\left(e^{-a\sqrt{\xi^2-k^2}}\right) - \frac{2a}{b}\int\limits_{0}^{k} d\left(\sqrt{k^2-\xi^2}\right) = \frac{2}{b}+\frac{2ak}{b}.$$

Тогда справедлива оценка

$$|a_{mn}| \le \int\limits_0^1\int\limits_0^1 t^m x^n\sqrt{1+(f'(x))^2}\frac{2}{x+t}\left(1+(f(x)+f(t))k\right)dxdt \le$$

$$\le 2\left(1+2k\max f(x)\right)\int\limits_0^1\sqrt{1+(f'(x))^2}dx\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{t^m x^n}{t+x}dxdt =$$

$$= \frac{C_1}{m(n+1)},$$

$$C_1 = 2\left(1+2k\max f(x)\right)\int\limits_0^1\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Поэтому

$$m_2^2(N) \le \sum_{m=N+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{C_1^2}{m^2(n+1)^2} \le \left(\frac{3C_1}{2}\right)^2\frac{1}{N}.$$

Можно также показать, что выполняется неравенство

$$m_1^2(N) \le O\left(\frac{N^2}{M^2}\right) + N^4R_\infty^2.$$

Если выполнены условия леммы 1, то аппроксимирующая система $\overline{A}\overline{c} = \overline{y}$ может иметь только одно решение (возможно, начиная с некоторого значения параметра N). Тогда последовательность приближенных решений сходится и ее предел – точное решение БСЛАУ (3). Таким образом, справедлива

Теорема 1 . *Если выполнены условия (8), то решение из l_2 системы (3) существует при любой ее правой части из l_2.*

Скорость сходимости приближенного метода также оценивается с помощью неравенств (6) и (7).

Теорема 2 . *Если выполнены условия (8), то метод усечения БСЛАУ (3) дает приближенные решения, сходящиеся в пространстве l_2 к точному решению при $N \to +\infty$. При этом*

$$\|x - S_X\overline{x}\|_{l_2} \leq O\left(\frac{1}{N}\right).$$

При доказательстве нужно использовать оценку

$$\|(S_Y T_Y - I)y\|_{l_2} \leq O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Литература

[1] Тумаков Д.Н. *Интегральное уравнение задачи дифракции электромагнитной волны на криволинейном металлическом экране* // Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т.13. Численные методы решения линейных и нелинейных краевых задач. Казанск. матем. об-во. - Казань: Изд-во "ДАС", 2001. - С.218-225.

[2] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. *Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции).* - М.: ИПРЖР, 1996. - 176 с.

[3] Плещинский Н.Б. *К абстрактной теории приближенных методов решения линейных операторных уравнений* // Изв. вузов. Матем. - 2000. - №3. - С.39-47.